



Prognozowanie i Symulacje. Wykład I.

Matematyczne metody prognozowania

Edward Kozłowski

e-mail: e.kozlovski@pollub.pl

Spis treści

- 1 Szeregi czasowe
- 2 Etapy budowy modeli matematycznych
- 3 Matematyczne modele dynamiczne

Szeregi czasowe

Definicja 1

Szereg czasowy jest to proces stochastyczny z czasem dyskretnym $\{x_t\}_{t \in T}$ gdzie $T = \{t_0, t_1, \dots\}$.

Definicja oparta jest na pojęciu zmiennej losowej x_t zależnej od parametru t (czasu). Czasami zakładamy, że odstępy pomiędzy t_i i t_{i+1} są jednakowe. Tym samym mamy do czynienia ze sparametryzowaną rodziną zmiennych losowych. Rozkłady tych zmiennych losowych, a w szczególności ich pierwsze i drugie momenty również mogą zależeć od czasu t .

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

- 1 **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$.

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

- ① **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$.
- ② **Sezonowość.** Czynnik kształtujący okresowe wahania analizowanego zjawiska w ciągu roku. Wyniki działań czynników sezonowych modelujemy za pomocą nielosowej funkcji $\varphi(t)$.

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

- ❶ **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$.
- ❷ **Sezonowość.** Czynnik kształtujący okresowe wahania analizowanego zjawiska w ciągu roku. Wyniki działań czynników sezonowych modelujemy za pomocą nielosowej funkcji $\varphi(t)$.
- ❸ **Cykliczność.** Czynnik kształtujący zmiany analizowanego zjawiska pod wpływem długoczasowych cykli o charakterze ekonomicznym, demograficznym lub astrofizycznym, który opisujemy za pomocą funkcji nielosowej $\psi(t)$.

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

- 1 **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$.
- 2 **Sezonowość.** Czynnik kształtujący okresowe wahania analizowanego zjawiska w ciągu roku. Wyniki działań czynników sezonowych modelujemy za pomocą nielosowej funkcji $\varphi(t)$.
- 3 **Cykliczność.** Czynnik kształtujący zmiany analizowanego zjawiska pod wpływem długoczasowych cykli o charakterze ekonomicznym, demograficznym lub astrofizycznym, który opisujemy za pomocą funkcji nielosowej $\psi(t)$.
- 4 **Losowość.** Czynnik kształtujący wahania (fluktuacje) o charakterze losowym. Wyniki działań losowych czynników modelujemy za pomocą zmiennych losowych $\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots$

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

- ❶ **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$.
- ❷ **Sezonowość.** Czynnik kształtujący okresowe wahania analizowanego zjawiska w ciągu roku. Wyniki działań czynników sezonowych modelujemy za pomocą nielosowej funkcji $\varphi(t)$.
- ❸ **Cykliczność.** Czynnik kształtujący zmiany analizowanego zjawiska pod wpływem długoczasowych cykli o charakterze ekonomicznym, demograficznym lub astrofizycznym, który opisujemy za pomocą funkcji nielosowej $\psi(t)$.
- ❹ **Losowość.** Czynnik kształtujący wahania (fluktuacje) o charakterze losowym. Wyniki działań losowych czynników modelujemy za pomocą zmiennych losowych $\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots$
- ❺ **Trend stochastyczny.** Czynnik kształtujący dynamikę o charakterze losowym. W przypadku trendu stochastycznego własności dynamiczne szeregu zmieniają się w czasie. Trend stochastyczny w szeregu czasowym powstaje w wyniku integracji poprzednich zaburzeń.

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

Szereg czasowy opisujemy za pomocą równania stanu

$$x_t = \lambda_1 f_{tr}(t) + \lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \psi(t) + \varepsilon_t \quad \text{dla } t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

gdzie

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i\text{-ty czynnik wpływa na kształtowanie,} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wnioskowanie o istnieniu i -tego czynnika może być oparte na analizie istoty zadania (ma charakter aprioryczny, teoretyczny – w tym celu wykorzystujemy publikacje, ekspertyzy opracowane wcześniej) lub na podstawie analizy statystycznej badanego szeregu (analizie trajektorii i własności badanego zjawiska).

Identyfikacja szeregu czasowego

W oparciu o trajektorię realizacji szeregu szacowanego $\{x_t\}_{t \in T}$, $T = \{0, 1, \dots, N\}$ należy:

- 1 określić, które z nielosowych funkcji $f_{tr}(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ uczestniczą w modelu (1), tzn należy określić wartości parametrów $\lambda_i, i = 1, 2, 3$;

Identyfikacja szeregu czasowego

W oparciu o trajektorię realizacji szeregu szacowanego $\{x_t\}_{t \in T}$, $T = \{0, 1, \dots, N\}$ należy:

- 1 określić, które z nielosowych funkcji $f_{tr}(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ uczestniczą w modelu (1), tzn należy określić wartości parametrów λ_i , $i = 1, 2, 3$;
- 2 skonstruować estymatory dla nielosowych funkcji występujących w szeregu czasowym (1);

Identyfikacja szeregu czasowego

W oparciu o trajektorię realizacji szeregu szacowanego $\{x_t\}_{t \in T}$, $T = \{0, 1, \dots, N\}$ należy:

- 1 określić, które z nielosowych funkcji $f_{tr}(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ uczestniczą w modelu (1), tzn należy określić wartości parametrów λ_i , $i = 1, 2, 3$;
- 2 skonstruować estymatory dla nielosowych funkcji występujących w szeregu czasowym (1);
- 3 dobrać model opisujący zachowanie funkcji losowej ε_t oraz dobrać estymatory parametrów rozkładu.

Budowa modeli matematycznych

- 1 na podstawie dostępnej informacji dobieramy odpowiednią klasę modeli;

Budowa modeli matematycznych

- 1 na podstawie dostępnej informacji dobieramy odpowiednią klasę modeli;
- 2 wybieramy model próbny;

Budowa modeli matematycznych

- 1 na podstawie dostępnej informacji dobieramy odpowiednią klasę modeli;
- 2 wybieramy model próbny;
- 3 dokonujemy identyfikacji modelu próbnego;

Budowa modeli matematycznych

- 1 na podstawie dostępnej informacji dobieramy odpowiednią klasę modeli;
- 2 wybieramy model próbny;
- 3 dokonujemy identyfikacji modelu próbnego;
- 4 sprawdzamy za pomocą narzędzi statystyki matematycznej czy wybrany model jest poprawny (czy dobrze jest dopasowany do danych empirycznych). Jeżeli jest dobrze dopasowany to jest gotowy do wykorzystania w celu prognoz. W przeciwnym razie, gdy zostanie wykryta niezgodność, to procedurę musimy wykonać od nowa (identyfikacja, estymacja, sprawdzenie);

Budowa modeli matematycznych

- 1 na podstawie dostępnej informacji dobieramy odpowiednią klasę modeli;
- 2 wybieramy model próbny;
- 3 dokonujemy identyfikacji modelu próbnego;
- 4 sprawdzamy za pomocą narzędzi statystyki matematycznej czy wybrany model jest poprawny (czy dobrze jest dopasowany do danych empirycznych). Jeżeli jest dobrze dopasowany to jest gotowy do wykorzystania w celu prognoz. W przeciwnym razie, gdy zostanie wykryta niezgodność, to procedurę musimy wykonać od nowa (identyfikacja, estymacja, sprawdzenie);
- 5 ostatecznym sprawdzianem jest weryfikacja empiryczna.

Modele deterministyczne i stochastyczne

- 1 Model, który pozwala dokładnie obliczyć wartość zmiennej zależnej w dowolnym momencie, nazywamy modelem deterministycznym.

Modele deterministyczne i stochastyczne

- 1 Model, który pozwala dokładnie obliczyć wartość zmiennej zależnej w dowolnym momencie, nazywamy modelem deterministycznym.
- 2 Model, który pozwala wyznaczyć przyszłe wartości z prawdopodobieństwami, nazywamy modelem probabilistycznym lub stochastycznym.

W modelach stochastycznych, w odróżnieniu od modeli deterministycznych, przyszłe wartości szeregu czasowego możemy oszacować z pewnym błędem, natomiast nie potrafimy określić ich dokładnie.

Przykład I. Model wartości kapitału

Niech x_t oznacza wielkość kapitału w chwili $t = 0, 1, 2, \dots, N$, natomiast stopa zwrotu pozbawiona ryzyka wynosi r . Zależności wielkości kapitału od stopy zwrotu możemy przedstawić wzorem

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = r,$$

lub w postaci

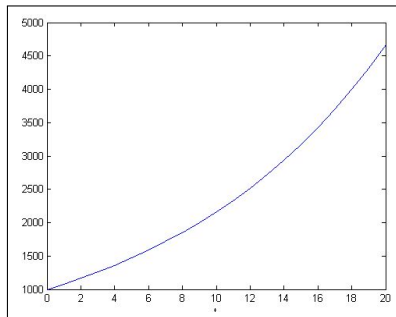
$$x_{t+1} = (1 + r) x_t.$$

W takim razie wielkość kapitału którym dysponuje inwestor w chwili t , jeżeli w chwili $t = 0$ posiadał $x_0 = M$, możemy przedstawić w postaci ciągu geometrycznego

$$x_t = M (1 + r)^t.$$

Przykład I. Model wartości kapitału

Rysunek przedstawia wartość kapitału dla momentów $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ w przypadku, gdy wartość początkowa $M = 1000$ oraz stopa zwrotu jest stała i wynosi 8%.



Przykład II. Model autoregresji rzędu k

Niech ciąg x_t , $t \geq 0$ jest postaci

$$x_t = \lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1} + \dots + \lambda_k x_{t-k} + \varepsilon_t,$$

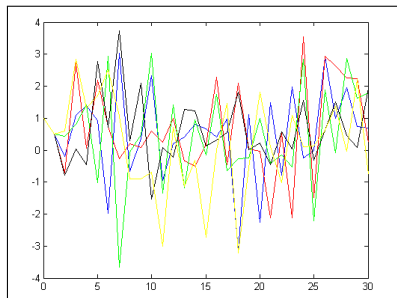
gdzie $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ są parametrami modelu, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in N}$ oznacza gaussowski biały szum – ciąg zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Przykład II. Model autoregresji rzędu k

Rysunek przedstawia możliwe trajektorie systemu podporządkowane modelowi autoregresji rzędu 2 postaci

$$x_t = 0.5 - 0.2x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t$$

dla warunku początkowego $x_0 = 1$, $x_1 = 0.5$, gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in T}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 4)$, natomiast $T = \{2, \dots, 20\}$.



Zastosowanie modeli matematycznych

Modele stochastyczne mają dość szerokie zastosowanie w praktyce. Opisując zachowanie obiektów (systemów technicznych, ekonomicznych, socjologicznych itp.) za pomocą zmiennych losowych możemy przewidywać (szacować z prawdopodobieństwem) wartości tych systemów bądź wartości zależne od tych systemów. Proste przykłady poniżej pokazują zastosowanie modeli stochastycznych w ekonomii.

Przykład III. Zastosowanie modeli matematycznych

Przedsiębiorstwo produkuje towar oraz sprzedaje po ustalonej cenie p . Popyt na towar jest podporządkowany rozkładowi log-normalnemu $LN(m, \sigma^2)$. Funkcja kosztów jest liniowa $K(y) = k_0 + k_1 y$, gdzie y oznacza wielkość produkcji. Poniżej oszacujemy oczekiwany popyt na dobro oraz oczekiwany zysk ze sprzedaży przy założeniu, że wielkość produkcji jest równa wielkości sprzedaży.

Niech zmienna losowa ξ reprezentuje popyt na dobro. Funkcja gęstości rozkładu log-normalnego $LN(m, \sigma^2)$ ma postać

$$\gamma(x, m, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Przykład III. Zastosowanie modeli matematycznych

Oczekiwany popyt wynosi

$$E\xi = \int_0^{\infty} \frac{x}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Aby wyznaczyć powyższą całkę dokonujemy zamianę zmiennych

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{array} \right\}.$$

Oczekiwany popyt wynosi

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(y - \frac{(y - m)^2}{2\sigma^2}\right) dy = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Wobec powyższego oczekiwany zysk (przychód minus koszty) ze sprzedaży wynosi

$$E(p\xi - k_0 - k_1\xi) = (p - k_1)E\xi - k_0 = (p - k_1)e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} - k_0.$$

Przykład IV. Zastosowanie modeli matematycznych

Przedsiębiorstwo produkuje dobra niesubstytucyjne, które są sprzedawane po cenach p_1 i p_2 odpowiednio. Popyty na dobra są stochastycznie niezależne oraz podporządkowane rozkładowi Poissone'a z parametrami $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$. Funkcje kosztów są liniowe $K(\xi_i) = k_{0i} + k_{1i}\xi_i$. Poniżej oszacujemy oczekiwane popyty oraz oczekiwany łączny zysk ze sprzedaży.

Niech $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ reprezentuje wektor popytów na dobra. Funkcja gęstości zmiennej losowej X dla rozkładu Poissone'a z parametrem λ ma postać

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Przykład IV. Zastosowanie modeli matematycznych

Oczekiwany popyt dla dobra pierwszego:

$$E\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(n-1)!} = \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = \lambda_1.$$

Analogicznie $E\xi_2 = \lambda_2$. Ostatecznie oczekiwany popyt na dobra wynosi

$$E\xi = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ E\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

natomiast oczekiwany łączny zysk jest równy

$$\begin{aligned} & E(p_1\xi_1 - K(\xi_1) + p_2\xi_2 - K(\xi_2)) \\ &= p_1 E\xi_1 - (k_{01} + k_{11}E\xi_1) + p_2 E\xi_2 - (k_{02} + k_{12}E\xi_2) \\ &= (p_1 - k_{11})\lambda_1 + (p_2 - k_{12})\lambda_2 - k_{01} - k_{02}. \end{aligned}$$